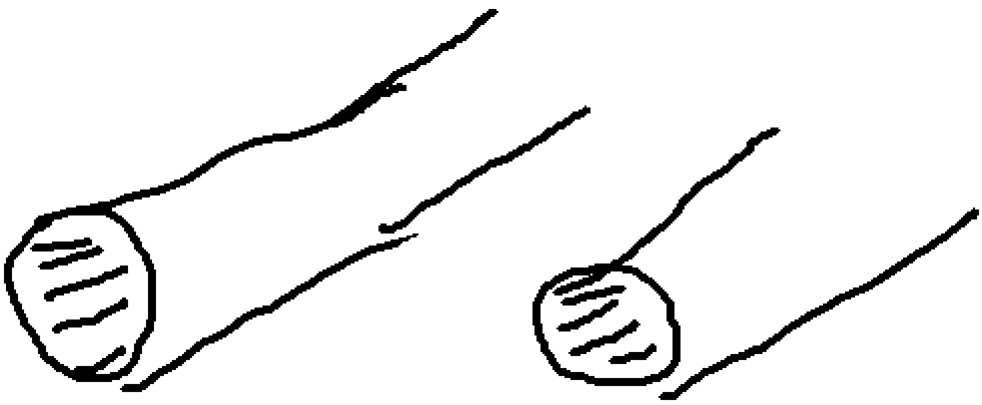
Лекционный материал (теорию) я писал где-то в начале октября только на основе 4-й лекции Вятчанина, без учёта применения к задачам.
Практику к КР2 (следующую методичку) – накануне её, где-то в начале декабря.

Лекционный материал в полном виде я советую глянуть интересующимся радиофизикой, ну и перед экзаменом повторить (например, вывод телеграфных уравнений, которые вам не пригодятся нигде, кроме экзамена). А если вам нужно быстро подготовиться к КР2, то бегом смотреть сразу следующую методичку (пятую), где я кратко дам теормин с лекции, введя в курс дела, и мы понесёмся решать задачи.

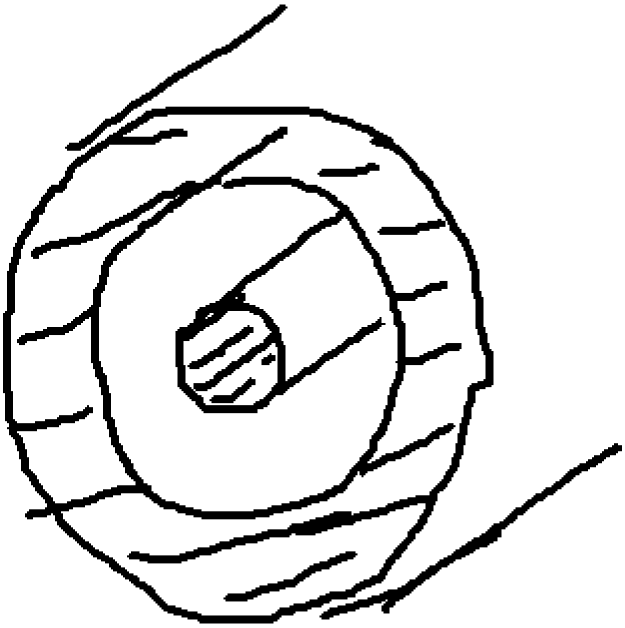
Длинная линия – основной пример распределённой системы. Длинная линия представляет собой два параллельных проводника, расстояние между которыми много меньше их длины d << l.

Первая мысль – ща запишем уравнения Максвелла и аналитически найдём поле, заряды и цепи в этих двух проводниках. Но вот только вид этих уравнений будет кардинально зависеть от формы сечения этих проводников.

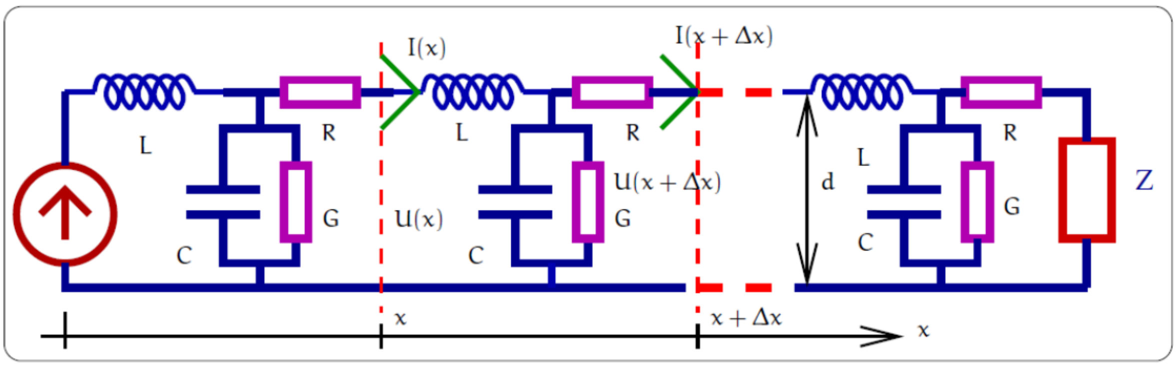
Это могут быть два параллельных цилиндра



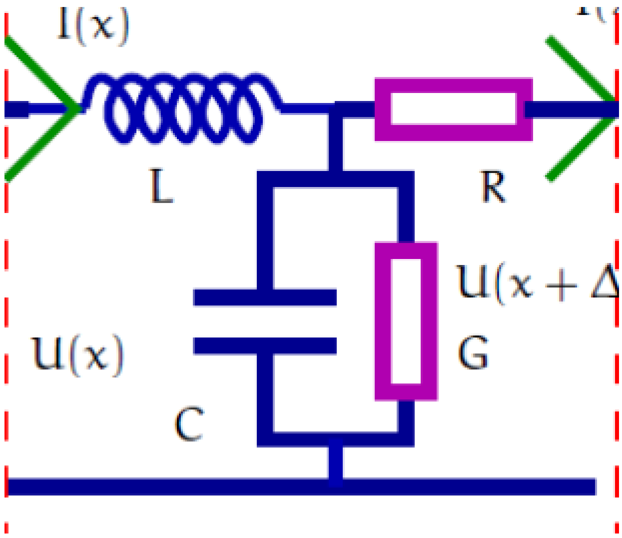
Так и два коаксиальных (имеющих общую ось, вообще «аксиал» значит «ось», т.е. соосных):



Разумеется, существуют ещё типы.
А мы хотим (точнее, хотят авторы курса радиофизики, а мы хотим понять то, чего хотят они) выделить какие-то факты и развести теорию, не зависящую от формы проводника.
Какой подход предлагает наш лектор?
Разбить линию на участки длиной dx и [M]



Представить линию в виде электрической цепи из множества одинаковых элементов. Вот таких:



Отображающих участок цепи длиной dx (в дальнейшем будем его называть ячейкой).

Откуда взялось сопротивление R горизонтального резистора, понятно – выделение теплоты в цепи. Конденсатор – у нас два провода неизбежно будут взаимодействовать между собой, это взаимодействие как раз и изобразит конденсатор. Резистор, параллельно соединённый с конденсатором – у нас реальные конденсаторы неидеальны, чего у говорить о несуществующем (этот резистор соответствует току утечки). Ну а катушка отвечает за то, вдруг в одном из проводов возникнут вихревые токи. Сечение же проводов не бесконечно малое, там есть некая площадь.

Вопрос: а почему нет катушки и горизонтального резистора в нижнем проводе? Ответ: в длинных цепях нижний провод мы считаем провод заземлённым в каждой точке. Это Вятчанин на лекциях не проговаривает, но я спросил его на семинаре, и он мне сказал именно так.

Как можно понять, величины L, R, C и G зависят от выбора размеров ячейки dx. Эта зависимость, как можно понять, прямо пропорциональная:
Чем длиннее ячейка dx, тем больше сопротивление R на ней будет (оно прямо пропорционально dx).
Чем длиннее ячейка dx, тем больше индуктивность L на ней будет (L прямо пропорционально dx – вспомните, что при одинаковой плотности витков индуктивность прямо пропорциональна длине катушки).
Чем длиннее ячейка dx, тем больше площадь S конденсатора и тем больше ёмкость C на нём будет (опять прямая пропорциональность от dx).
Поэтому вполне естественным будет нормировать их на dx, введя погонное сопротивление, индуктивность, ёмкость:

$$L = \left[\frac{\text{Гн}}{\text{м}}\right],$$

$$C = \left[\frac{\Phi}{\text{м}}\right],$$

$$R = \left[\frac{\text{Ом}}{\text{м}}\right],$$

Которые уже не будут зависеть от размеров ячейки и будут определяться только геометрией сечения цепи! Именно этого мы и добивались.
Сложнее всего с оставшимся элементом - вертикальным резистором (см. рисунок). Во-первых, как видно из рисунка, вместо его сопротивления R обозначена его проводимость G. Первая мысль – это всё только для того, чтобы запутать бедных студентов. На самом деле нет, проводимость нужна для того, чтобы и здесь была прямая пропорциональность dx. Так как резистор вертикальный, а не горизонтальный, длине ячейки dx пропорционально не сопротивление, а как раз проводимость!
Также нормируем её на dx

$$G = \left[\frac{\text{См}}{\text{м}}\right].$$

И получаем погонную проводимость.

Напоминаю, что на самом деле никаких катушек с витками, конденсаторов с двумя обкладками, резисторов, соединяющих цепи, нет. На самом всё взаимодействие осуществляется при помощи электромагнитного поля. Но мы можем это самое взаимодействие представить, как будто у нас вся эта катушечная ересь, чтобы не писать сложные полевые уравнения, которые мы и не напишем, не зная геометрии сечения.

Замечание, которое лектор не сделал, а я вот считаю достаточно важным. Сравним с задачей про струну.

Там было u(x,t) – поперечное отклонение от положения равновесия, здесь U(x,t) – напряжение между двумя соседними точками на двух проводах в момент времени t. Даже буква одна и та же, размер просто разный ☺

Теперь проговорим краевые условия.
И там, и там мы должны знать всё в нулевой момент времени.

И там, и там мы должны знать что-то на левом конце, а именно, условие 1-го рода (т.е. Дирихле) - U(0) (т.е. слева) в любой момент времени. Для струны это означает, что слева стоит Вася, который трясёт конец струны как ему хочется. Для цепи, что у генератора стоит Вася и крутит его ручку как ему вздумается.
И там, и там мы должны знать что-то про правый конец. У струны, например, мы можем поставить Петю, который будет так же, как и Вася, произвольно трясти конец. В терминах электрической цепи это будет означать генератор на правом конце с Петей, произвольно крутящей ручку. Это очень простой для понимания пример, однако, будем честны, немного странный: глупо делать цепь с двумя генераторами без нагрузки, обычно, в реальности, у нас цепь с одним генератором (слева) и какой-то нагрузкой (справа). Если мы поставим справа нагрузку с какой-то ВАХой, то… краевое условие у нас будет, но оно будет третьего рода, т.е. содержать и U, и его производную. В терминах струны, напомню, краевое условие третьего рода – это когда Петя держит пружинку, а другой конец этой пружинки прикреплён к правому концу струны.

Краевые условия краевыми условиями, но всё же самое главное – дифур. Он был в задаче про струну и давал нам две волны. Посмотрим, что будет здесь.

Теперь давайте запишем два уравнения, которые называются телеграфными.
Сперва давайте подсчитаем количество тока, оседающего на ячейке.
То есть нас будет интересовать разность I(x+dx, t)-I(x, t).
Давайте рассуждать. Часть тока ушла на зарядку конденсатора. Эта часть тока равна $dq_{\text{конденсатора}}/dt$, а учитывая, что ёмкость конденсатора C*dx, можем эту производную по времени выразить через напряжение между двумя проводами в точке с абсциссой x:

$$C\Delta x \frac{\partial U(x,t)}{\partial t}$$

А часть тока пошла на резистор, параллельно соединённой с катушкой. Применим закон Ома (проводимость резистора – G*dx) и подсчитаем эту часть тока:

$$G\Delta x U(x,t)$$

Итого

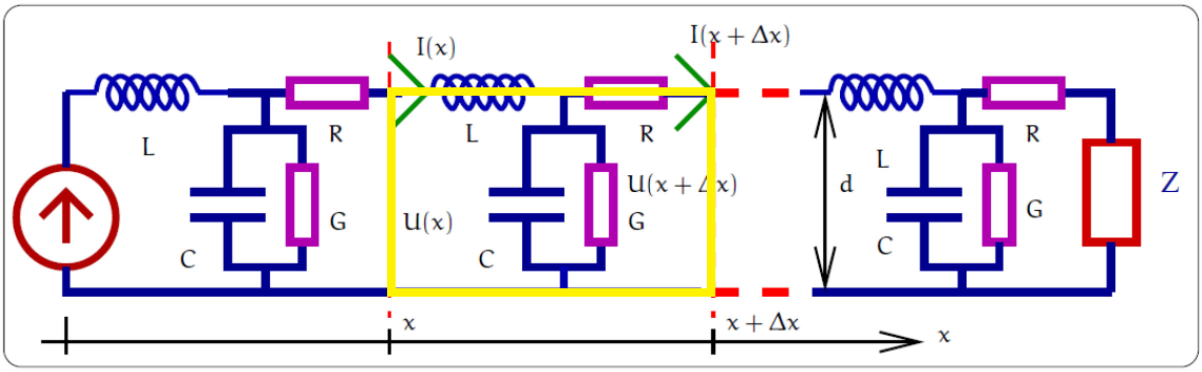
$$I(x+\Delta x) \quad = \quad I(x) - C\Delta x \frac{\partial U(x,t)}{\partial t} - G\Delta x\, U(x,t),$$

Преобразуем:

$$
\begin{aligned}
-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}\cdot\Delta x &= C\Delta x\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + G\Delta x\,U(x,t),\\
-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x} &= C\,\frac{\partial U(x,t)}{\partial t} + G\,U(x,t).
\end{aligned}
$$

Мы получили первое телеграфное уравнение.

Мы нашли производную силы тока по координате, теперь найдём производную напряжения по координате.
Понятней всего это сделать, записав закон Кирхгофа для вот такого участка:



$$
\begin{aligned}
0 &= U(x+\Delta x) - U(x) + L\Delta x\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R\Delta x\,I,\\
-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x}\cdot\Delta x &= L\Delta x\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R\Delta x\,I(x,t),\\
-\frac{\partial U(x,t)}{\partial x} &= L\,\frac{\partial I(x,t)}{\partial t} + R\,I(x,t).
\end{aligned}
$$

Мы получили второе телеграфное уравнение.

Теперь получим ещё одно уравнение – волновое. Для этого

Теперь продифференцируем 4.1 по времени и умножим на L, а 4.2 продифференцируем по координате, и вычтем из первого результата второй.

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2} + GL\partial_L U(x,t) - R\partial_x I(x,t).$$

Ну да, что-то похоже на волновое уравнение, только у нас вылезли ещё два слагаемых, отвечающих за активное сопротивление.
(проводя аналогию с колебаниями струны – там тоже были бы эти слагаемых, если бы мы учитывали всевозможное трение, в т.ч. сопротивление о воздух).
Пока их отбросим.

$$\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial x^2} = LC\frac{\partial^2 U(x,t)}{\partial t^2}.$$

(с точки зрения струны это соответствует колебаниям струны в вакууме). Тогда скорость волны

$$v_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}.$$

Замечание: мы получили, что скорость волны, если нет активного сопротивления, зависит только от геометрических параметров системы, а не от формы импульса.
Т.е. у нас нет дисперсии – зависимости скорости волны от вида импульса (помните оптику?) Как бы Вася не крутил бы ручку генератора, Петя, сидящий на другом конце этой линии, получит в точности тот график, который накрутил Вася.

Разумеется, решением волнового уравнения являются две волны, вправо и влево:

$$U_+(x,t) = F_1\left(t - x\sqrt{LC}\right) = F_1\left(t - \frac{x}{v_0}\right)$$

$$U_-(x,t) = F_2\left(t + x\sqrt{LC}\right) = F_2\left(t + \frac{x}{v_0}\right).$$

Это напряжение, а что сила тока? Оказывается, что и в том, и в том случае она связана с напряжением простым соотношением

$$I_+ = \frac{U_+(x,t)}{\rho},$$

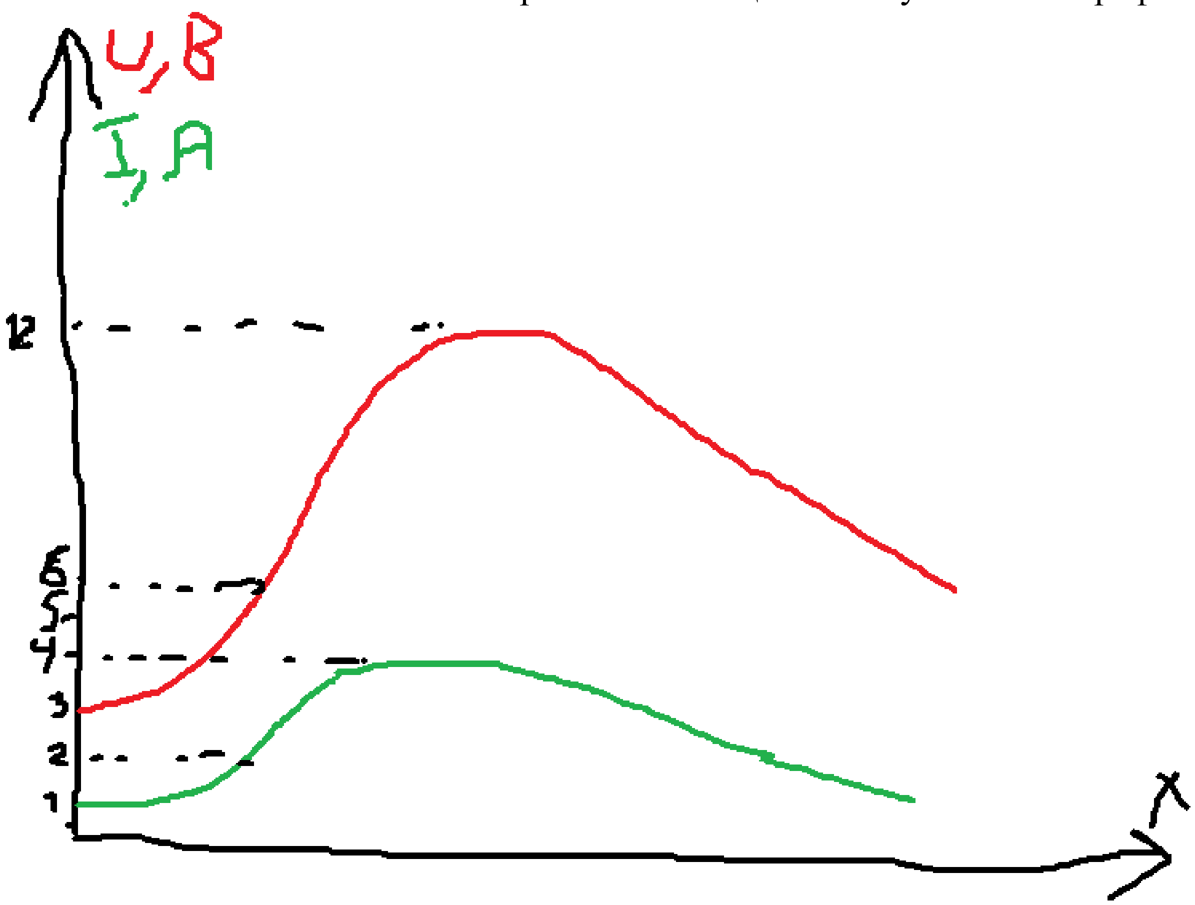
$$I_- = -\frac{U_-(x,t)}{\rho}.$$

Где величина ρ

$$\rho = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

И называется волновым сопротивлением. Понятно, почему сопротивлением – это же отношение напряжения к силе тока, и почему волновым – волна же.

Физический смысл волнового сопротивления ещё можно уяснить из графика:



Это отношение напряжения к силе тока, которое одинаково во всех точках линии и в любой момент времени (на этом графике оно равно 3 Ома).
Правда, так всё прекрасно-расчудесно только в том случае, если волна бегущая.

Длинные линии с потерями.
Сделаем допущение: пусть генератор в начале цепи генерирует не абы какое напряжение, а гармоническое.
Тогда телеграфные уравнения запишутся как

$$-\partial_x I(x) = (i\omega C + G)U(x),$$
$$-\partial_x U(x) = (i\omega L + R)I(x).$$

Дифференцируя второе по времени и подставляя производную тока по времени из первого, получим

$$\frac{\partial^2 U(x)}{\partial x^2} - \gamma^2 U(x) = 0,$$

$\gamma^2 = (R + i\omega L)(G + i\omega C)$ и называется постоянной распространения.

Нас будет интересовать случай хорошего проводника с малым активным сопротивлением:

$$R \ll \omega L, \qquad G \ll \omega C.$$

В этом случае мы можем преобразовать λ^2, раскрыв скобки и выкинув члены второго порядка малости.
Получим

$$\gamma^2 \cong -\omega^2 LC\left(1 - \frac{i\omega(LG + CR)}{\omega^2 LC}\right),$$

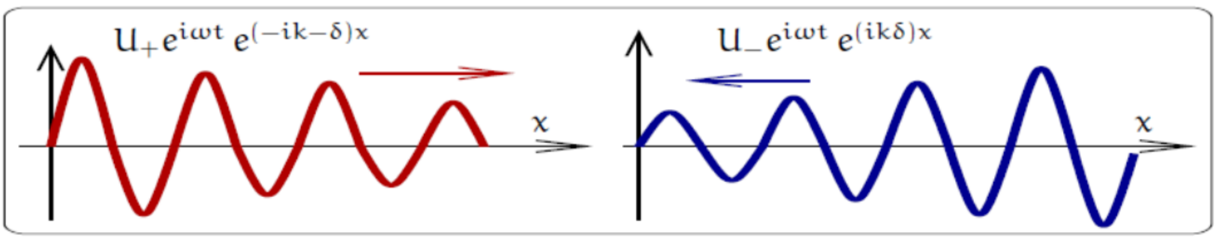
$$\gamma \cong \pm i\omega\sqrt{LC}\left(1 - \frac{i(LG + CR)}{2\omega LC}\right) = \pm\frac{i\omega}{v_0} \pm \frac{1}{2}\left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right),$$

$$\gamma_+ \cong -ik - \delta, \qquad \gamma_- \cong -ik + \delta, \qquad k = \frac{i\omega}{v_0}, \qquad \delta = \frac{1}{2}\left(G\rho + \frac{R}{\rho}\right).$$

$$U(x) = U_+(x) + U_-(x),$$

здесь $U_+(x) = U_+ e^{i\omega t} e^{(-ik-\delta)x}, \qquad U_-(x) = U_- e^{i\omega t} e^{(ik+\delta)x}.$

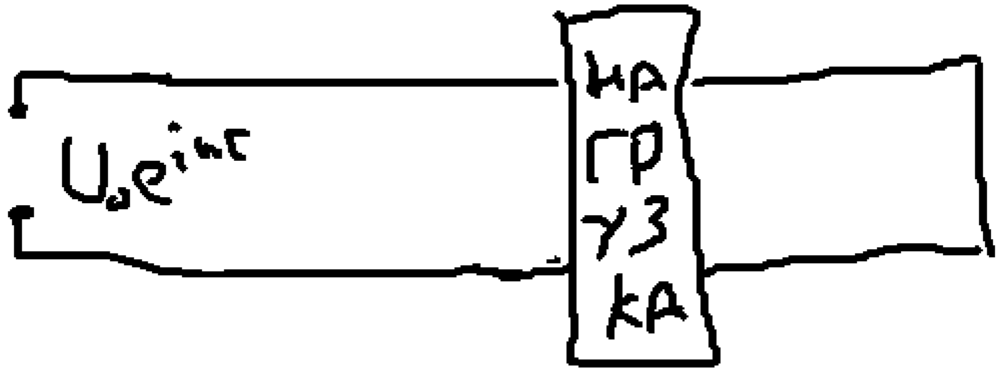
А на графиках



Т.е. если мы начнём генерировать синусоидальное напряжение генератором, которое мы поставим слева, волна направо пойдёт, но её амплитуда начнёт спадать по экспоненциальному закону.
Если мы начнём генерировать синусоидальное напряжение генератором, которое мы поставим справа, волна налево пойдёт, но её амплитуда начнёт спадать по экспоненциальному закону.

До этого мы особо не парились насчёт нагрузки. Справа мог стоять как Петя с генератором, так и нагрузка с каким-то замудрённым ВАХом. Теперь же мы внимательно посмотрим, что будет, если мы на правом конце мы подставим нагрузку. Пусть напряжение будет гармоническим, иначе мы все умрём (хотя все и так умрём… но позже), а нагрузка будем обладать импедансом $Z_н$. Потерями на сопротивлении также пренебрежём.
Нагрузка может быть как на правом конце

Так и в середине:



В роли нагрузки в середине цепи может выступать как и действительно полезная нагрузка, вроде, например, лампочки, провода от которой идут к двум паралелльным линиям, но и любая неоднородность, как, например, изменение геометримеческих параметров линии (уменьшение/увеличение площади сечения).

В этом случае, когда неоднородность в середине цепи, у нас получается третье краевое… точнее, срединное ☺ условие. Но оно не дополняет начальную постановку задачу (иначе она может запросто потерять решение, как может потерять решение система из N уравнений на N неизвестных, если мы в неё добавим ещё уравнение), просто в точке, где эта неоднородность возникает, у нас исчезает дифур (в случае радиофизики – телеграфные и волновые уравнения), а как раз добавляется ВМЕСТО него срединное условие.

В задаче со струной это равносильно тому, что если бы в середине струны её взял Коля и начал трясти свою руку как ему вздумается. Если вы помните, дифур для каждой точки струны получается, если мы записываем второй закон Ньютона для каждой точки струны. Естественно, в точке Коли записывать второй закон Ньютона бессмысленно, т.к. там действует непонятная Колина сила, но нам и не нужно, т.к. у нас уже есть уравнение движения, определяемое Колиным мозгом. Т.е. в этой точке дифура у нас нет.

Введём коэффициент отражения как

$$k_{\text{отр}} = \frac{U_+}{U_-}$$

Отношение волны, прошедшей нагрузку и побежавшей дальше вправо, к той, которая из-за наличия неоднорости развернулась и ушла налево.
(чёт кванты вспомнились и коэфы отражения и пропускания оттуда)

$$k_{\text{отр}}(\omega) = \frac{Z_{\text{н}}(\omega) - \rho}{Z_{\text{н}}(\omega) + \rho}.$$

Рассмотрим частные случаи:

Рассмотрим интересные частные случаи:

1) $Z_{\text{н}} = \rho$. Это возможно только в случае $Z_{\text{н}}$ – вещественное. Этот случай называют *условием согласования*. В таком случае отражения нет, вся мощность поглощается нагрузкой.

$$U_- = 0,$$

$$P_+ = \langle \frac{U_+^2}{\rho} \rangle = \frac{|U_+|^2}{2\rho}, \qquad P_- = 0.$$

2) $Z_{\text{н}} = 0$. Это случай короткого замыкания на конце линии. Тогда $U_- = U_+$. Мощность не поглощается: $P_+ + P_- = 0$.

Насчёт второго случая я поясню, почему именно «на конце линии»: накоротко замкнуть можно и в середине линии, только в этом это место автоматически станет концом цепи, потому что в обход короткого замыкания ток не пойдёт.
Мощность мы до этого не обсуждали, но там надо просто U на I умножить. В оригинальном конспекте с тичина мощность обозначается буквой W, но всё-таки мощность лучше обозначать P, оставив W для энергии.

3) $Z_н = \infty$. Это случай обрыва линии. Тогда $U_- = U_+$. Мощность не поглощается: $P_+ + P_- = 0$.

Чтобы лучше понять принцип нагрузки, см. пятую методичку – решение задач на длинные линии.